

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ, 23.01.2010**

**Cls. a XII-a  
REZOLVĂRI**

**1.**

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \Leftrightarrow (xy)^{2009} = x^{2009} \cdot y^{2009}$$

$$g(x \cdot y) = g(x) \cdot g(y) \Leftrightarrow (xy)^{2010} = x^{2010} \cdot y^{2010}$$

$$\text{Dar } (xy)^{2010} = (xy)^{2009} \cdot xy = x^{2009} \cdot y^{2009} \cdot xy = x^{2010} \cdot y^{2010} = x^{2009} \cdot x \cdot y^{2009} \cdot y \\ \Rightarrow y^{2009} \cdot x = x \cdot y^{2009}$$

$$\text{Cum } f: G \rightarrow G \text{ surjecție} \Rightarrow \forall z \in G, \exists y \in G \text{ a.î. } f(y) = z \Leftrightarrow y^{2009} = z$$

Atunci  $z \cdot x = x \cdot z, \forall x, z \in G \Rightarrow (G, \cdot)$  este abelian.

**2.**

$$A = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{3} \\ \hat{3} & \hat{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \hat{0}$$

$$X^6 = A \Rightarrow \det(X^6) = \hat{0} \Rightarrow \det X = \hat{0}.$$

$$\text{Dacă } X = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \Rightarrow \det X = \hat{a}^2 - \hat{b}^2 = \hat{0} \Leftrightarrow \hat{a}^2 = \hat{b}^2, \hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_7.$$

Din tabla operației de înmulțire în  $\mathbb{Z}_7 \Rightarrow \hat{a}^2, \hat{b}^2 \in \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$ . Unica clasă din  $\mathbb{Z}_7$  pentru care

$$\hat{a}^2 = \hat{0} \text{ este } \hat{a} = \hat{0} \Rightarrow \hat{0} \text{ nu este soluție a ecuației } \hat{a}^2 = \hat{b}^2.$$

$$\text{Dacă } \hat{a}^2 = \hat{b}^2 = \hat{1} \Rightarrow$$

$$\hat{a} = \hat{1}, \hat{b} = \hat{6} \text{ sau}$$

$$\hat{a} = \hat{6}, \hat{b} = \hat{1} \text{ sau}$$

$$\hat{a} = \hat{6}, \hat{b} = \hat{6} \text{ sau}$$

$$\hat{a} = \hat{1}, \hat{b} = \hat{1}.$$

$$\text{Dacă } \hat{a}^2 = \hat{b}^2 = \hat{2} \Rightarrow$$

$$\hat{a} = \hat{b} = \hat{3} \text{ sau}$$

$$\hat{a} = \hat{b} = \hat{4} \text{ sau}$$

$$\hat{a} = \hat{3}, \hat{b} = \hat{4} \text{ sau}$$

$$\hat{a} = \hat{4}, \hat{b} = \hat{3}.$$

$$\text{Dacă } \hat{a}^2 = \hat{b}^2 = \hat{4} \Rightarrow$$

$$\hat{a} = \hat{b} = \hat{2} \text{ sau}$$

$$\hat{a} = \hat{b} = \hat{6} \text{ sau}$$

$$\hat{a} = \hat{2}, \hat{b} = \hat{5} \text{ sau}$$

3.

$$\left( x^2 \cdot \ln x \cdot \sin \frac{1}{x} \right)' = 2x \cdot \ln x \cdot \sin \frac{1}{x} + x \sin \frac{1}{x} - \ln x \cdot \cos \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\ln x \cdot \cos \frac{1}{x} = x \sin \frac{1}{x} (2 \ln x + 1) - \left( x^2 \ln x \cdot \sin \frac{1}{x} \right)' . \quad (1)$$

$$\text{Fie funcția } g: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x \sin \frac{1}{x} \cdot (2 \ln x + 1).$$

$$\lim_{x \searrow 0} g(x) = 0. \text{ Prelungind prin continuitate funcția } g \text{ în } x=0 \Rightarrow g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuă} \Rightarrow$$

$$G \text{ admite primitive. Fie } G \text{ o primitivă a lui } g, \quad (G)' = g.$$

$$\text{Relația (1) devine } \ln x \cdot \cos \frac{1}{x} = \left( G(x) - x^2 \ln x \cdot \sin \frac{1}{x} \right)'.$$

Dacă  $f$  admite primitive, atunci o primitivă a ei este de forma

$$F(x) = \begin{cases} G(x) - x^2 \ln x \cdot \sin \frac{1}{x} + C, & x > 0 \\ p, & x = 0 \end{cases}$$

Necesar  $F$  continuă și derivabilă.

$$F(0+0) = G(0) + C. \text{ Impun } p = F(0+0) \Rightarrow F|_{(0, \infty)} \text{ este derivabilă. Rămâne de verificat derivabilitatea în origine.}$$

$$F'(0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = G'(0).$$

$$\left. \begin{aligned} F'(0) &= G'(0) = 0 \\ F'(0) &= f(0) = m \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = 0.$$

4.

Fie  $f(0) = a$ . Dacă  $a \neq 0$  atunci pentru  $x = \frac{1}{a}$  și  $y = 0$  din relația dată în enunț avem:

$$f\left(\frac{1}{a}\right) - a = \frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{1}{a}\right) \cdot a \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) - a = f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow a = 0 \text{ contradicție.}$$

$$\text{Deci } a = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

$$\text{Pentru } y = 0 \text{ din relația dată obținem } f(x) = x \cdot f(x) \cdot f(0) + f(0) \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$